
Περιεχόμενα

Σημείωμα του επιμελητή	xiii
Πρόλογος στην ελληνική έκδοση	xv
Πρόλογος	xix
Παραπομπές	xxiii
Άλλα βιβλία	xxv
Χρήσιμα URL	xxix
Συνήθης συμβολισμός	xxxix

1 Πολλαπλασιασμός μητρώων1

1.1	Βασικοί αλγόριθμοι και συμβολισμός	2
1.2	Δομή και αποδοτικότητα	15
1.3	Σύνθετα μητρώα και αλγόριθμοι	23
1.4	Ταχύ γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα	34
1.5	Διανυσματοποίηση και τοπικότητα	44
1.6	Παράλληλος πολλαπλασιασμός μητρώων	51

2 Ανάλυση μητρώων67

2.1	Βασικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας	68
2.2	Νόρμες διανυσμάτων	73
2.3	Νόρμες μητρώων	75
2.4	Διάσπαση ιδιάζουσας τιμής	80
2.5	Μετρικές υπόχωρων	86
2.6	Ευαισθησία τετραγωνικών συστημάτων	91
2.7	Υπολογισμοί μητρώων πεπερασμένης ακρίβειας	98

3 Γενικά γραμμικά συστήματα111

3.1	Τριγωνικά συστήματα	112
3.2	Παραγοντοποίηση LU	117
3.3	Σφάλμα στρογγύλευσης στην απαλοιφή Gauss	128
3.4	Οδήγηση	132
3.5	Βελτίωση και εκτίμηση της ακρίβειας	144
3.6	Παράλληλη LU	151

4 Ειδικά γραμμικά συστήματα159

4.1	Διαγώνια υπεροχή και συμμετρία	160
-----	--------------------------------	-----

4.2	Θετικά ορισμένα συστήματα	165
4.3	Συστήματα ζώνη	183
4.4	Συμμετρικά αόριστα συστήματα	192
4.5	Σύνθετα τριδιαγώνια συστήματα	203
4.6	Συστήματα Vandermonde	210
4.7	Κλασικές μέθοδοι για τα συστήματα Toeplitz	214
4.8	Κυκλομεταθετά και διακριτά συστήματα Poisson	226

5 Ορθογωνιοποίηση και ελάχιστα τετράγωνα 241

5.1	Μετασχηματισμοί Householder και Givens	242
5.2	Παραγοντοποίηση QR	255
5.3	Πρόβλημα ελάχιστων τετραγώνων πλήρους τάξης	268
5.4	Άλλες ορθογώνιες παραγοντοποιήσεις	283
5.5	Πρόβλημα ελάχιστων τετραγώνων ελλιπούς τάξης	297
5.6	Τετραγωνικά και υποκαθορισμένα συστήματα	307

6 Τροποποιημένα προβλήματα και μέθοδοι ελάχιστων τετραγώνων 313

6.1	Στάθμιση και κανονικοποίηση	314
6.2	Ελάχιστα τετράγωνα υπό περιορισμούς	323
6.3	Ολικά ελάχιστα τετράγωνα	330
6.4	Υπολογισμοί υπόχωρων με την SVD	338
6.5	Ανανέωση της παραγοντοποίησης μητρώου	345

7 Μη συμμετρικά προβλήματα ιδιοτιμών 359

7.1	Ιδιότητες και διασπάσεις	360
7.2	Θεωρία διαταραχής	369
7.3	Επαναλήψεις δύναμης	377
7.4	Η μορφή Hessenberg και η πραγματική μορφή Schur	388
7.5	Ο πρακτικός αλγόριθμος QR	397
7.6	Υπολογισμοί αναλλοίωτων υπόχωρων	406
7.7	Γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών	417
7.8	Προβλήματα ιδιοτιμών γινομένων και χαμιλτονιανών μητρώων	432
7.9	Ψευδοφάσματα	439

8 Συμμετρικά προβλήματα ιδιοτιμών 451

8.1	Ιδιότητες και διασπάσεις	452
8.2	Επαναλήψεις δύναμης	462
8.3	Συμμετρικός αλγόριθμος QR	469
8.4	Επιπλέον μέθοδοι για τα τριδιαγώνια προβλήματα	479
8.5	Μέθοδοι Jacobi	488
8.6	Υπολογισμός της SVD	498
8.7	Γενικευμένα προβλήματα ιδιοτιμών με συμμετρία	509

9 Συναρτήσεις μητρώων 527

- 9.1 Μέθοδοι ιδιοτιμών 528
- 9.2 Μέθοδοι προσέγγισης 536
- 9.3 Εκθετική συνάρτηση μητρώου 544
- 9.4 Πρόσημο, τετραγωνική ρίζα και λογάριθμος μητρώου 550

10 Προβλήματα ιδιοτιμών για μεγάλα αραιά μητρώα 561

- 10.1 Συμμετρική διαδικασία Lanczos 562
- 10.2 Διαδικασία Lanczos: ολοκλήρωση και προσέγγιση 572
- 10.3 Πρακτικές διαδικασίες Lanczos 578
- 10.4 Πλαίσια SVD για μεγάλα αραιά μητρώα 588
- 10.5 Μέθοδοι Krylov για μη συμμετρικά προβλήματα 596
- 10.6 Jacobi-Davidson και σχετικές μέθοδοι 606

11 Προβλήματα μεγάλων, αραιών γραμμικών συστημάτων 615

- 11.1 Άμεσες μέθοδοι 616
- 11.2 Κλασικές επαναληπτικές μέθοδοι 630
- 11.3 Μέθοδος συζυγούς κλίσης 645
- 11.4 Άλλες μέθοδοι Krylov 660
- 11.5 Προρρύθμιση 671
- 11.6 Πλαίσιο πολυπλέγματος 691

12 Ειδικά θέματα 703

- 12.1 Γραμμικά συστήματα με δομή μετατόπισης 704
- 12.2 Προβλήματα δομημένης τάξης 714
- 12.3 Υπολογισμοί γινομένων Kronecker 729
- 12.4 Συστολές και ξεδιπλώματα τανυστών 742
- 12.5 Διασπάσεις τανυστών και επαναληπτικές μέθοδοι 754

Ευρετήριο 771

Σημείωμα του επιμελητή

Η παρούσα έκδοση αποτελεί το πρώτο βιβλίο στη νέα σειρά επιστημονικών συγγραμμάτων με τίτλο «Μαθηματικά και Πληροφορική» από τις εκδόσεις Πεδίο. Έχω την χαρά και την τιμή να επιμελούμαι αυτή τη σειρά. Η φιλοδοξία μας είναι να εμπλουτίσουμε την ελληνική βιβλιογραφία, σε ολόκληρο το φάσμα που καλύπτουν οι δύο επιστήμες, με σημαντικά πρωτότυπα συγγράμματα, καθώς και με μεταφράσεις κορυφαίων συγγραμμάτων, όπως το βιβλίο των Golub και Van Loan που κρατάτε στα χέρια σας.

Τα Μαθηματικά και η Πληροφορική αποτελούν δύο στενά αλληλένδετες επιστήμες, οι οποίες γνωρίζουν εντυπωσιακή άνθηση σήμερα, τόσο καθαρά ερευνητικά όσο και στο πλήθος των εφαρμογών τους, και επηρεάζουν τις περισσότερες πτυχές της ανθρώπινης δραστηριότητας. Βέβαια, έχουν πολύ διαφορετική ηλικία. Τα Μαθηματικά έχουν σημαδέψει την ανθρώπινη διανόηση με μια ιστορία χιλιετιών, ενώ η Πληροφορική έχει να επιδείξει μια συγκλονιστική μεν διαδρομή, η οποία όμως διαρκεί λιγότερο από έναν αιώνα.

Ουσιαστικά, η Πληροφορική αποτελεί πνευματικό τέκνο των Μαθηματικών. Επομένως, είναι φυσικό να αναπτύσσονται ισχυρές συνέργειες μεταξύ τους, οι οποίες συχνά οδηγούν στη δημιουργία νέων επιστημονικών περιοχών. Το παρόν βιβλίο είναι ένα τρανό παράδειγμα επιστημονικής δουλειάς που σίγουρα δεν θα είχε τον διαχρονικό αντίκτυπο που έχει, αν δεν στηριζόταν και στους δύο αυτούς πυλώνες. Είναι χαρακτηριστική η ευκολία με την οποία οι συγγραφείς περνούν από ένα μαθηματικό θεώρημα στον αντίστοιχο αλγόριθμο, παραθέτοντας μάλιστα συχνά και ψευδοκώδικα για την υλοποίησή του. Πρόκειται για κορυφαίο, αν όχι το σημαντικότερο, βιβλίο διεθνώς στην Υπολογιστική Γραμμική Άλγεβρα και μπορώ να βεβαιώσω, και από προσωπική εμπειρία, πως θα βοηθήσει αποτελεσματικά και τον φοιτητή που αντιμετωπίζει νέες έννοιες αλλά και τον ερευνητή που αναζητά ένα βιβλίο αναφοράς.

Η παρουσίαση, από τους συγγραφείς, της μαθηματικής θεωρίας των μητρώων με έμφαση στους υπολογισμούς και τους αντίστοιχους αλγόριθμους προσέθεσε στη δυσκολία της μετάφρασης ενός συγγράμματος το οποίο, και μόνο από την έκτασή του, αποτελούσε δυσπρόσιτο στόχο. Επιθυμώ να συγχαρώ τον μεταφραστή για την προσπάθειά του, να ευχαριστήσω τους συναδέλφους Στρατή Γαλλόπουλο και Χρήστο Κοναξή για την βοήθειά τους στο μεταφραστικό έργο, και να ζητήσω την κατανόηση του αναγνώστη για τυχόν αστοχίες μας, καθώς η ελληνική βιβλιογραφία έχει αρκετά κενά στη σχετική ορολογία. Προσπαθήσαμε να μείνουμε πιστοί στο πρωτότυπο, αποφεύγοντας όμως αδόκιμους όρους. Η σημαντικότερη απόφασή μας ήταν πως αποφύγαμε τη λέξη «μήτρα» επιλέγοντας τον όρο «μητρώο», που είναι πλησιέστερα στο πρωτότυπο «matrix» απ' ό,τι η λέξη «πίνακας», η οποία επιπλέον αποδίδει περισσότερες έννοιες. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει το γλωσσάρι που δημιουργήθηκε στη διάρκεια της μετάφρασης στη διεύθυνση <http://erga.di.uoa.gr/courses/glwssariGolubVanLoan.pdf>.

Τέλος, αξίζουν θερμά συγχαρητήρια στις εκδόσεις Πεδίο για τη δημιουργία της σειράς «Μαθηματικά και Πληροφορική». Τέτοιες πρωτοβουλίες στηρίζουν και ενθαρρύνουν την επιστημονική δραστηριότητα, προσφέροντας ένα ισχυρό αντίδοτο στην πολύπλευρη κρίση που βιώνουμε.

Ιωάννης Ζ. Εμίρης
Καθηγητής, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σεπτέμβριος 2015

Πρόλογος στην ελληνική έκδοση

Η μετάφραση του *Matrix Computations* των Golub και Van Loan (*GVL*) αποτελεί εκδοτικό γεγονός μεγάλης σημασίας για την ελληνική επιστημονική κοινότητα. Είναι επομένως μεγάλη ευχαρίστηση και τιμή για μένα που ο επιμελητής της έκδοσης, φίλος και καθηγητής Ιωάννης Εμίρης, με προσκάλεσε να γράψω τον πρόλογο. Αξίζουν θερμά συγχαρητήρια στον ίδιο και στους εκδότες για την πρωτοβουλία τους, και ιδιαίτερα στον μεταφραστή για την απόδοση του μνημειώδους αυτού έργου στην ελληνική γλώσσα. Το *GVL* καθίσταται πλέον ευπρόσιτο στην ελληνική ερευνητική κοινότητα, καλύπτοντας ένα σημαντικό κενό της επιχώριας επιστημονικής βιβλιογραφίας, ενώ συγχρόνως θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μεγαλύτερη ευχέρεια ως διδακτικό σύγγραμμα στα πανεπιστήμια.

Αρμόζει εδώ να αναφέρω (σε δική μου απόδοση) μια σχετικά πρόσφατη διήγηση του διακεκριμένου καθηγητή του Berkeley, Beresford Parlett¹: «*Πριν από πολλά χρόνια ο Dick Lau, διευθυντής προγραμμάτων έρευνας στο Γραφείο Ναυτικών Ερευνών², μου είπε: “Επιχωρηγώ μερικούς από εσάς για να μελετάτε υπολογισμούς μητρώων, αλλά σας βλέπω να ασχολείστε με τρία μόνον προβλήματα: (1) την επίλυση του $Ax=b$, (2) διάφορα προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων, και (3) την επίλυση του $Ax=\lambda Bx$. Γιατί δεν μπορείτε να τα λύσετε μια και καλή ώστε να προχωρήσετε σε πιο δύσκολα προβλήματα;”*» Και συνεχίζοντας ο Parlett σημειώνει: «*Δεν είχα την ετοιμότητα του Marvin Minsky να τολμήσω να ρωτήσω “Μα υπάρχουν άλλα προβλήματα;” και αντ’ αυτού απάντησα, λίγο πληγωμένος, ότι ενώ οι θεωρητικοί μαθηματικοί έχουν την πολυτέλεια να επικαλούνται στρατιωτικούς όρους και να αναφέρονται στη μάχη κατά της άγνοιας και στο ότι δεν έχουν λόγο να επαναποδεικνύουν τα θεωρήματά τους³, εμείς εξυπηρετούμε τους χρήστες των υπολογιστών και είμαστε υποχρεωμένοι να βρίσκουμε τρόπους να αντιμετωπίζουμε τα σημεία συμφόρησης των υπολογισμών τους. Όπως φαίνεται όμως, αυτοί οι στενωποί οφείλονται σχεδόν πάντα σε προβλήματα που ανάγονται στις τρεις παραπάνω κατηγορίες”*». Και τελειώνει αναφερόμενος στο σήμερα: «*Οι κατηγορίες επιφανειακά παραμένουν οι ίδιες, αυτά όμως που συμβαίνουν από κάτω είναι αγνώριστα⁴*».

¹ Η διήγηση είναι από βιβλιοκριτική του B. Parlett στο *SIAM Review*, 52: 771 (2010).

² Πρόκειται για το Office of Naval Research, μια υπηρεσία του Υπουργείου Αμύνης των ΗΠΑ που παρέχει τεχνικές συμβουλές στο Γενικό Επιτελείο Ναυτικού.

³ Τρόπος του λέγειν, βέβαια, γιατί στην πραγματικότητα οι μαθηματικοί επανέρχονται σε λυμένα προβλήματα και γνωστές αποδείξεις. Για παράδειγμα, όπως αναφέρει ο Bruce Schechter στο βιβλίο του *Το μυαλό μου είναι ανοιχτό* (μετάφραση Γ. Κυριακόπουλου, πρόλογος Γ.Α. Ευαγγελόπουλου & Π. Μπρεγιάννη, εκδ. Τραυλός, Αθήνα, 2015), ο Paul Erdős ήταν περήφανος γιατί γνώριζε 37 διαφορετικές αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος, ενώ, όπως είχε εύστοχα παρατηρήσει ο Gian-Carlo Rota, «η συντριπτική πλειονότητα των ερευνητικών εργασιών στα Μαθηματικά αφορά όχι την απόδειξη αλλά την εκ νέου απόδειξη (...), όχι την επινοήση, αλλά την ενοποίηση και επεξεργασία, κοντολογίς, αυτό που ο Thomas Kuhn ονομάζει “συμμάζεμα”» (βλ. επίσης Gian Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser, Boston, 2008).

⁴ Ο B. Parlett εννοεί ότι, ενώ τα προβλήματα παραμένουν τα ίδια, οι τρόποι επίλυσής τους αλλάζουν. Στο θέμα αυτό έχει αναφερθεί εκτενέστερα στο σημαντικό του άρθρο “Progress in Numerical Analysis”, *SIAM Review*, 20: 443-456 (1978).

Από την πρώτη του έκδοση (*GVL* 1) το 1983, το βιβλίο *Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρών* αποτέλεσε βασική αναφορά για το επιστημονικό αυτό αντικείμενο, καθώς κάλυπτε ένα πολύ μεγαλύτερο εύρος ζητημάτων από όλα τα άλλα (σχετικά λίγα) βιβλία που πραγματευόταν αυτή την περιοχή. Οι αριθμοί είναι αποκαλυπτικοί: Το Google Scholar εντοπίζει σήμερα περισσότερες από 50.000 αναφορές για τις τέσσερις εκδόσεις του *GVL*, ενώ δεν υπάρχει άλλο βιβλίο που πλησιάζει το *GVL* σε ευρύτητα (χωρίς να είναι εγκυκλοπαίδεια ή εγχειρίδιο), παρόλο που έχουν περάσει 30 χρόνια από την πρώτη έκδοση. Παρόλο που το έργο άργησε να μεταφραστεί στη γλώσσα μας, είναι εντέλει ευτύχημα που αυτό γίνεται λίγο μετά την κυκλοφορία της τέταρτης έκδοσης (*GVL* 4), η οποία πραγματεύεται πολλά επιπλέον ζητήματα σε σύγκριση με τις προηγούμενες. Σημειώνω ενδεικτικά τις μεθόδους Jacobi-Davidson, τις μεθόδους πολυπλέγματος, την επίλυση συστημάτων με ειδική δομή, τον υπολογισμό συναρτήσεων μητρών, τον υπολογισμό του ψευδοφάσματος, νέες τεχνικές αναδρομικού τύπου και μεθόδους «διαίρει-και-βασίλευε», για παράδειγμα, τον αλγόριθμο Spike για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, την προσέγγιση μεγάλων αραιών μητρώων με παραγοντοποιήσεις μειωμένης τάξης με επαναληπτικές μεθόδους για τον υπολογισμό του SVD, καθώς και με νέες παραγοντοποιήσεις, όπως η CUR, που βασίζονται στην τυχαιότητα. Παρουσιάζονται επίσης υπολογιστικές μέθοδοι για ταυνιστές, καθώς η πλειογραμμική άλγεβρα αποτελεί πλέον σημαντικό εργαλείο για πολλές νέες εφαρμογές. Η προσθήκη των νέων θεματικών έχει διασφαλίσει τη μακρόχρονη επικαιρότητα του *GVL* τόσο για τους ερευνητές που χρησιμοποιούν υπολογισμούς με μητρώα όσο και για τους φοιτητές που επιθυμούν να εξοικειωθούν με το αντικείμενο. Το *GVL* περιλαμβάνει επίσης πλήθος εξαιρετικών και δοκιμασμένων ασκήσεων που είναι απαραίτητες για την αποτελεσματική διδασκαλία, χρήσιμα παραδείγματα σε MATLAB, εκτεταμένη βιβλιογραφία και πλήθος αναφορών σε αξιόπιστες υλοποιήσεις υπό μορφή βιβλιοθηκών λογισμικού. Τηρουμένων των αναλογιών, ο ρόλος του *GVL* στους επιστημονικούς υπολογισμούς είναι αντίστοιχος με τον ρόλο του μνημειώδους *The Art of Computer Programming* του Donald Knuth στην Επιστήμη των Υπολογιστών.

Αξίζει να τονιστεί εδώ ότι η μετάφραση του συγκεκριμένου βιβλίου είναι ένα πολύ δύσκολο έργο που αναμφίβολα θα ταλαιπώρησε τον μεταφραστή καθώς και τον επιμελητή. Επιπλέον του μεγάλου όγκου, λείπει η δόκιμη ελληνική ορολογία, καθώς υπάρχουν ελάχιστα ελληνικά συγγράμματα (πρωτότυπα ή μεταφράσεις) στην περιοχή της Υπολογιστικής Γραμμικής Άλγεβρας και κανένα από αυτά δεν έχει την έκταση και το βάθος του *GVL* 4, το αγγλικό ευρετήριο του οποίου περιέχει περισσότερους από 1.200 όρους. Εδώ πρέπει να επαινεθεί η επιλογή να χρησιμοποιηθεί ο όρος «μητρώο» για τη μετάφραση της κεντρικής μαθηματικής οντότητας του γνωστικού αντικειμένου του βιβλίου. Όπως έχω επιχειρηματολογήσει αλλού⁵, η επιλογή αυτή είναι πολύ πιο συνεπής με τον στόχο που είχε ο J.J. Sylvester όταν εισήγαγε τον όρο *matrix* στα Μαθηματικά⁶ από τη λέξη «πίνακας» που παραμένει διαδεδομένη στην ελληνική βιβλιογραφία.

⁵ Πρόλογος στην ελληνική έκδοση στο Alan J. Laub, *Ανάλυση Μητρώων για Επιστήμονες και Μηχανικούς*, Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2005. Στο ίδιο σύγγραμμα υπάρχει αρκετά εκτενές Γλωσσάρι με την ελληνική απόδοση όρων της περιοχής.

⁶ "... I have (...) defined a 'Matrix' as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent", στο J.J. Sylvester, "On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions", *Phil. Mag.*, I: 295-305 (1851).

Λίγα λόγια για τους συγγραφείς. Ο Charles Van Loan έλαβε το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Michigan, κατέχει την έδρα Joseph C. Ford of Engineering του Τμήματος Επιστήμης των Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Cornell και είναι πολύ γνωστός για το εκτενές ερευνητικό και συγγραφικό του έργο. Έχει διακριθεί επίσης για τη συνεισφορά του σε θέματα εκπαίδευσης στις υπολογιστικές επιστήμες, ενώ το 2009 ανακηρύχθηκε Fellow του Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM)⁷. Αξίζει επιπλέον να σημειωθεί ότι ανέλαβε ο ίδιος το βάρος της συγγραφής της τέταρτης έκδοσης του *GVL* και ότι οι θεματικές επιλογές της εκτενώς ανανεωμένης έκδοσης φέρουν τη σφραγίδα του. Ο αείμνηστος Gene Golub (1932-2007), πρωτοπόρος των Υπολογισμών με Μητρώα, είχε λάβει το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Illinois στο Urbana-Champaign και διετέλεσε καθηγητής στο Stanford από το 1962. Ήταν ένας από τους σχεδιαστές του πρώτου αλγορίθμου για τον αριθμητικό υπολογισμό του SVD, ενώ για την επιστημονική συνεισφορά του ανακηρύχθηκε μέλος του National Academy of Sciences, του National Academy of Engineering, του American Academy of Arts and Sciences, του Royal Swedish Academy of Engineering Sciences και του Academy of Sciences of the Czech Republic, και τιμήθηκε με το Μετάλλιο Bolzano “for Merit in the Field of Mathematical Sciences”. Επί σειρά ετών διετέλεσε πρόεδρος του SIAM καθώς και πρόεδρος του Computer Science Department του Stanford. Ήταν θερμός υποστηρικτής και εμπνευστής των νέων ερευνητών και έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ίδρυση των κορυφαίων επιστημονικών περιοδικών εκδόσεων *SIAM Journal of Scientific Computing* και *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*.

Η ζωή του Gene Golub ήταν αφιερωμένη στην εδραίωση και στην προσεκτική οικοδόμηση του «οικοσυστήματος» της περιοχής των Υπολογισμών Μητρώων και των εφαρμογών τους στον Επιστημονικό Υπολογισμό⁸. Η περιοχή είναι συναρπαστική και τα τελευταία χρόνια έχει καταγράψει τεράστια ανάπτυξη. Ενδεικτική είναι και η εντυπωσιακή αύξηση των βιβλιογραφικών αναφορών: περίπου 500 στο *GVL* 1 (1983), 950 στο *GVL* 2 (1989), 1.250 στο *GVL* 3 (1996), ενώ στο *GVL* 4 οι αναφορές φθάνουν περίπου τις 2.500 και η κεντρική βιβλιογραφία είναι διαθέσιμη μόνον ηλεκτρονικά⁹. Έχει ενδιαφέρον ότι, πέραν των εφαρμογών στους κλάδους των μηχανικών και των φυσικών επιστημών, όπου οι υπολογισμοί με μητρώα είχαν ανέκαθεν κεντρικό ρόλο, τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται εκτενώς σε μεθόδους και εφαρμογές που στοχεύουν στην ανάλυση δεδομένων μεγάλου όγκου, ποικιλίας και με ραγδαίους ρυθμούς αλλαγής, καθώς και στην ανάλυση δικτύων. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος PageRank που ανέδειξε την Google, και στην εξέλιξη του οποίου συνέβαλε καθοριστικά ο Gene Golub, υλοποιείται μέσω υπολογισμού ιδιοδιανυσμάτων ή μέσω επίλυσης ειδικών γραμμικών συστημάτων, ενώ οι προσεγγιστικές παραγοντοποιήσεις μητρώων και οι μέθοδοι για τον αποτελεσματικό υπολογισμό τους αποτελούν βασικά εργαλεία στην ανακάλυψη και ανάδειξη λανθάνουσας πληροφορίας από τα δεδομένα, καθώς και στη συμπίεση και την οικονομική διαχείρισή τους.

⁷“For contributions to and exposition of matrix computations”.

⁸Δείτε στο <http://www.cs.cornell.edu/cv/OtherPdf/GoldenGene.pdf> την παρουσίαση του Charles Van Loan για τον Gene Golub, και στο eprints.ma.man.ac.uk/1024/01/covered/MIMS_ep2008_8.pdf τη συνέντευξή του στον καθηγητή Nick Higham (Manchester).

⁹Στο nickhigham.wordpress.com/2013/05/31/fourth-edition-of-matrix-computations/ υπάρχουν πολλά ενδιαφέροντα στοιχεία σχετικά με το βιβλίο και την εξέλιξη των εκδόσεων του *GVL*.

Αξίζει τέλος να αναφέρω ότι ο Gene Golub είχε επισκεφθεί την Ελλάδα και ότι χάρη σε γενναιόδωρο κληροδότημά του προς το *SIAM* διοργανώθηκε το 2015 στους Δελφούς το Gene Golub SIAM Summer School με θέμα “Randomization in Numerical Linear Algebra”. Στις αρχές του 2000 είχαμε συζητήσει μαζί το ενδεχόμενο να μεταφραστεί το *GVL* 3, αλλά για διάφορους λόγους δεν ανέλαβα την προσπάθεια. Είμαι βέβαιος ότι θα τον χαροποιούσε ιδιαίτερα αν έβλεπε ότι επιτέλους κάποιος το αποτόλμισε. Θερμά συγχαρητήρια και πάλι λοιπόν για την ελληνική έκδοση του *GVL* 4, η οποία θα διευκολύνει την πρόσβαση ερευνητών και φοιτητών μας στο σημαντικό αυτό έργο και μέσω αυτού στη σύγχρονη θεωρία και πρακτική των υπολογισμών μητρώων.

Ευστράτιος Γαλλόπουλος
Καθηγητής και Διευθυντής του HPCLab
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών
Συν-διοργανωτής του 2015 Gene Golub SIAM Summer School
Πάτρα, Αύγουστος 2015